CHAPITRE 3

INTRODUCTION A LA PERFORMANCE D'UN SYSTÈME

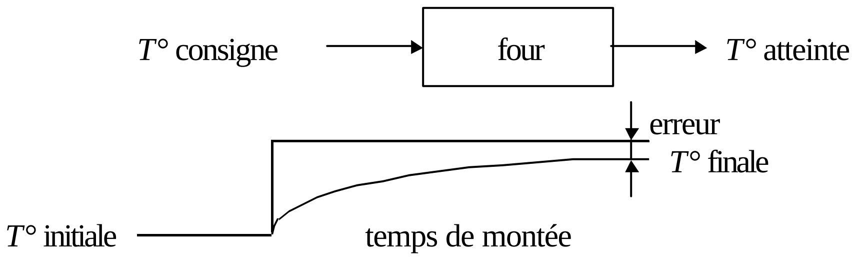
REPRÉSENTATIONS

Le système est maintenant mis en équation, il est donc beaucoup plus facile d'évaluer ses performances. Suivant le contexte, l'automaticien doit connaître deux aspects du système : régime transitoire et régime permanent.

1. Régime transitoire.

Ce régime de fonctionnement doit être bien connu pour les systèmes lents ou qui doivent réagir à une consigne. Les performances du système sont obtenues en mesurant la **rapidité** de prise en compte de la commande et la **précision** atteinte en sortie.

Exemple:



Les régimes transitoires (régime de transition entre T° initiale et T° finale sur l'exemple précédent) peuvent être de natures très différentes suivant le signal que l'on présente en entrée. Pour effectuer des comparaisons rapides entre tous les systèmes, on s'intéresse au régime transitoire obtenu par l'application de deux signaux particuliers:

1.1 Réponse impulsionnelle.

Réponse impulsionnelle.
C'est la réponse du système lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac $\delta(t)$. On note cette réponse $h(t)$.

Rappel:
On a vu précédemment que la transformée de Laplace de $h(t)$ est égale à la fonction de transfert du système: $H(p) = LP[h(t)]$.

La réponse impulsionnelle contient donc toute l'information nécessaire sur le système. Cependant, l'utilisation de cette réponse s'accompagne de quelques difficultés pratiques car on ne sait pas toujours réaliser une impulsion de durée très brève vis à vis des constantes de temps mises en jeu dans le système étudié.

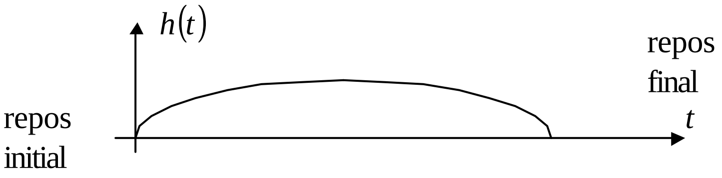
La réponse impulsionnelle ne permet pas d'évaluer les performances d'un système, mais elle permet d'introduire la notion de stabilité :

Stabilité.
Un système est dit stable, si sa réponse impulsionnelle est le siège d'un régime amorti :

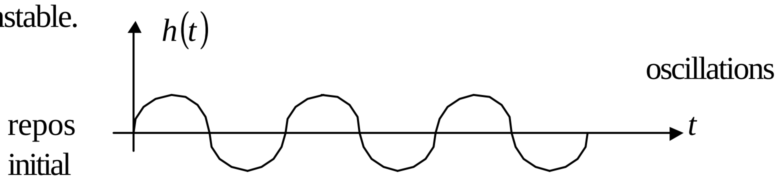
$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0$$

<u>Exemples</u>:

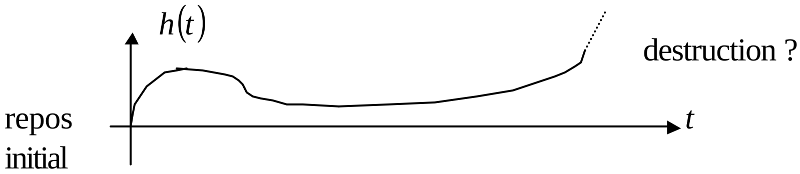
Système stable:



Système oscillant: instable.



Système instable:



Cette notion de stabilité, très importante dans l'étude des systèmes, sera largement reprise et approfondie dans le cours d'automatique. On ne doit pas oublier, en effet, que commander correctement un système, c'est avant tout éviter qu'il ne devienne instable.

1.2 Réponse indicielle.

Réponse indicielle.
C'est la réponse du système lorsque le signal d'entrée est un échelon $u(t)$. On note cette réponse $w(t)$.

Les performances du système sont définies à partir des caractéristiques de cette réponse :

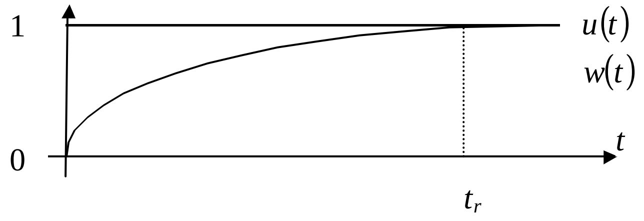
Régime de fonctionnement.
Le système est dit apériodique s'il atteint sa valeur limite sans oscillation. Dans le cas contraire, il est dit pseudo-périodique. Le régime critique sépare ces deux régimes.

Temps de réponse à *e%*.

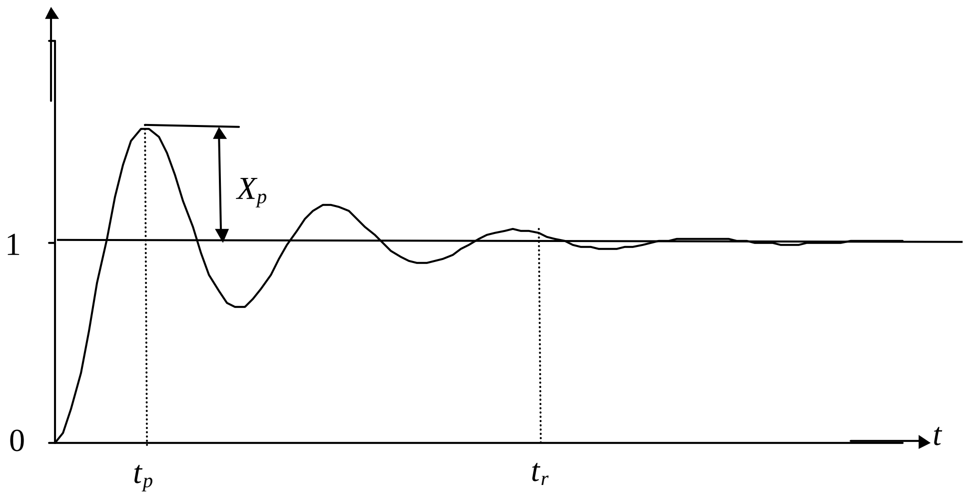
On appelle temps de réponse à $e\%$, le temps que met le système pour s'établir à $e\%$ de la valeur finale.
Le temps de réponse le plus utilisé est le temps de réponse à 5%. On le note en général t_r.

Exemple:

Régime apériodique :



Régime pseudo-périodique :



Pour les systèmes pseudo-périodiques, on définit aussi:
t_p: **instant de premier dépassement**.
X_p: **amplitude de premier dépassement**.

Remarques:

1. On a $LP[u(t)]\frac{1}{p}$

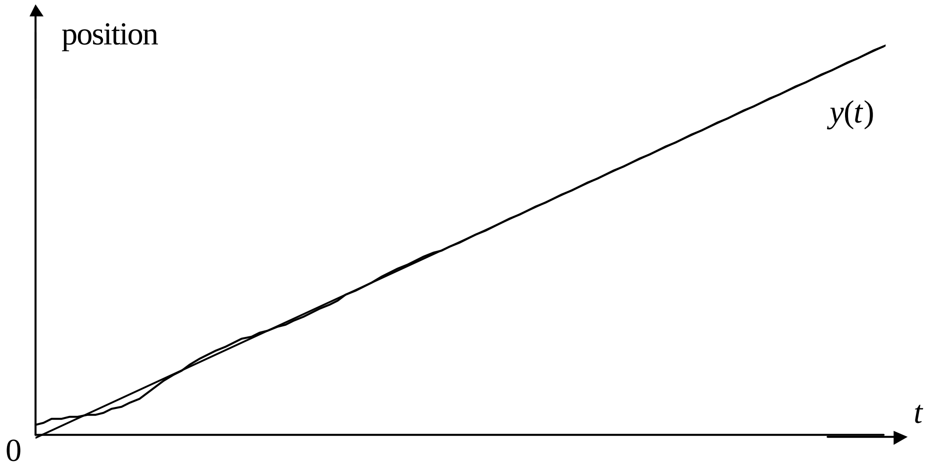
Et d'après la définition de la fonction de transfert, la réponse indicielle d'un système est caractérisée par: $W(p) = H(p).U(p)$

Soit: $pW(p) = H(p)$

D'après les propriétés de la transformée de Laplace, on a donc: $w'(t) = LP^{-1}[H(p)]$ ($w(0^+)$ est nul)

Soit: $w'(t) = h(t)$ où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système.

2. Pour compléter l'étude d'un système, on s'intéresse parfois à la réponse à un échelon de vitesse ou réponse à une rampe :



2. Régime harmonique.

Ce régime de fonctionnement doit être connu pour tous les systèmes rapides ou de type filtre. En effet, on s'intéresse ici au comportement fréquentiel du système: affaiblissement et déphasage du signal pour une fréquence donnée.

> **Régime harmonique**.
> Soit un système scalaire, linéaire et invariant. On dit que le système est en régime harmonique lorsque le signal d'entrée est sinusoïdal et que le système est en régime permanent.

On suppose que le système est régi par l'équation différentielle suivante, avec des conditions initiales nulles :

$$a_n.\frac{d^n x}{dt^n}+...+a_1.\frac{dx}{dt}+a_0.x=b_m.\frac{d^m y}{dt^m}+...+b_1.\frac{dy}{dt}+b_0.y$$

Pour simplifier les calculs qui vont suivre, on utilise le principe de superposition et on étudie la réponse au signal complexe : $\overline{x(t)}=\overline{X}.e^{jwt}=\overline{X}\left[\cos(wt)+j.\sin(wt)\right]=X.e^{j\Phi_x}.e^{jwt}$ avec $j^2=-1$.

On revient au signal réel $x(t)=Re\left[\overline{x(t)}\right]=X\cos(wt+\Phi_x)$.

X : amplitude de $x(t)$.

Φ_x : phase de $x(t)$.

$\overline{X}$: amplitude complexe de $x(t)$.

En régime permanent, la solution de l'équation différentielle est de la forme : $\overline{y(t)}=\overline{Y}e^{jwt}$: la sortie du système oscille avec la même fréquence que l'entrée, mais avec une amplitude différente et un déphasage.

On a :

$$a_n\overline{X}.(jw)^n.e^{jwt}+...+a_1\overline{X}.(jw).e^{jwt}+a_0\overline{X}.e^{jwt}=b_m\overline{Y}.(jw)^m.e^{jwt}+...+b_1\overline{Y}.(jw).e^{jwt}+b_0\overline{Y}.e^{jwt}$$

d'où : $$\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}=\frac{a_n.(jw)^n+...+a_0}{b_m.(jw)^m+...+b_0}=\overline{H(jw)}$$

Finalement, le signal de sortie est caractérisé par :

$$\boxed{Y=X.\left|\overline{H(jw)}\right| \quad \text{et} \quad \Phi=Arg\left[\overline{H(jw)}\right]}$$

On passe donc de $H(p)$ à $\overline{H(j\omega)}$ en remplaçant p par $j\omega$.

$\overline{H(j\omega)}$ est appelée **transmittance isochrone** ou **fonction de transfert** du système.

$\left|\overline{H(j\omega)}\right|$ donne le **gain** du système pour la pulsation ω.

$Arg\left[\overline{H(j\omega)}\right]$ donne la **phase** du système pour ω.

Les paramètres caractérisant le fonctionnement du système en régime harmonique sont le gain et le déphasage. Le système est donc bien connu lorsqu'on a une représentation du gain et du déphasage en fonction de la fréquence de fonctionnement. Plusieurs types de représentation sont utilisés :

2.1 Représentation de Bode.

Cette représentation est constituée de deux courbes:

1. $20.\log\left|\overline{H(j\omega)}\right|$ (unité: décibel, dB) en fonction de ω.
2. $Arg\left[\overline{H(j\omega)}\right]$ (unité: ° ou radian) en fonction de ω.

Pour ces deux tracés, l'axe des ω est gradué avec une échelle logarithmique.

<u>Exemples</u> : voir Unité U22-Systèmes linéaires et TD.

2.2 Représentation dans le plan de Nyquist.

Cette représentation est constituée d'une seule courbe:

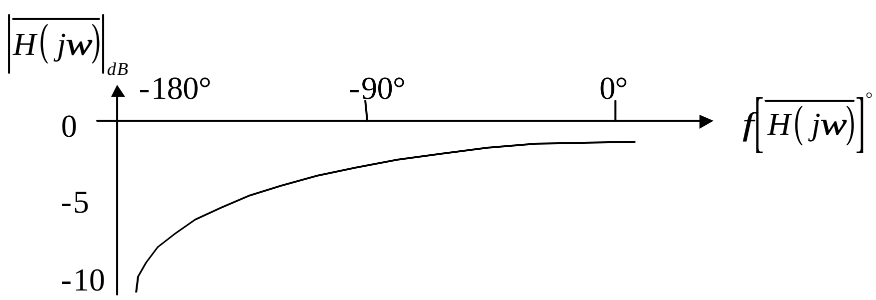
Pour $\omega = 0$ à $\omega \to +\infty$ on trace $\overline{H(j\omega)}$ dans le plan complexe : la partie imaginaire en ordonnées et la partie réelle en abscisses. La courbe obtenue est graduée en ω.

<u>Exemples</u> : voir TD

2.3 Représentation dans le plan de Black.

De même que pour la représentation dans le plan de Nyquist, cette représentation est également constituée d'une seule courbe. Pour $\omega = 0$ à $\omega \to +\infty$, $\overline{H(j\omega)}$ est tracé dans le système de coordonnées de Black. L'axe vertical représente le module de $\overline{H(j\omega)}$ en décibels ($\left|\overline{H(j\omega)}\right|_{dB}$) et l'axe horizontal représente la phase de $\overline{H(j\omega)}$ en radians ou en degrés ($\varphi\left[\overline{H(j\omega)}\right]$).

<u>Exemple</u> :



2.4 Définitions.

Pour comparer les régimes harmoniques des différents systèmes rencontrés, on définit les paramètres suivants :

Pulsations de coupure.

On appelle pulsations de coupure du système, les pulsations pour lesquelles le gain a diminué de 3 dB par rapport au maximum local. On note ces pulsations w_{ck}.

Bande passante.

On appelle bande passante, la zone de fréquence dans laquelle le gain n'est pas inférieur à -3 dB du maximum.

Gain statique.

On appelle gain statique du système, la valeur de $\left|\overline{H(0)}\right|$.

Cette valeur correspond au gain du système en réponse à un échelon :

(c'est à dire lorsque $w \to 0$, voir théorème de la valeur finale)